第　1　問

$0<\alpha<\dfrac{\pi}{2},\ 0<\beta<\dfrac{\pi}{2}$ なる実数 $\alpha,\ \beta$ で

$$\begin{cases} 2\sin^2\alpha\cos\alpha\left(\dfrac{1}{\tan\alpha}+\dfrac{1}{\tan\beta}\right)^2=1 \\ 2\sin^2\beta\cos\beta\left(\dfrac{1}{\tan\alpha}+\dfrac{1}{\tan\beta}\right)^2=1 \end{cases}$$

を満たすものを求めよ。

計　算　用　紙

(切り離さないで用いよ。)

【第 1 問】

$0<\alpha<\dfrac{\pi}{2},\ 0<\beta<\dfrac{\pi}{2}$ なる実数 $\alpha,\ \beta$ で

$$\begin{cases} 2\sin^2\alpha\cos\alpha\left(\dfrac{1}{\tan\alpha}+\dfrac{1}{\tan\beta}\right)^2=1 \\ 2\sin^2\beta\cos\beta\left(\dfrac{1}{\tan\alpha}+\dfrac{1}{\tan\beta}\right)^2=1 \end{cases}$$

を満たすものを求めよ。

$0<\alpha<\dfrac{\pi}{2},\ 0<\beta<\dfrac{\pi}{2}$ なる実数 $\alpha,\ \beta$ が

$$\begin{cases} 2\sin^2\alpha\cos\alpha\left(\dfrac{1}{\tan\alpha}+\dfrac{1}{\tan\beta}\right)^2=1 & \text{①} \\ 2\sin^2\beta\cos\beta\left(\dfrac{1}{\tan\alpha}+\dfrac{1}{\tan\beta}\right)^2=1 & \text{②} \end{cases}$$

を満たしている。

$$\begin{aligned} &\text{①}-\text{②} \\ \Leftrightarrow &\left(\dfrac{1}{\tan\alpha}+\dfrac{1}{\tan\beta}\right)^2\left(\sin^2\alpha\cos\alpha-\sin^2\beta\cos\beta\right)=0 \qquad \text{③} \end{aligned}$$

である。$\dfrac{1}{\tan\alpha}+\dfrac{1}{\tan\beta}>0$ から,

$$\begin{aligned} \text{③} &\Leftrightarrow \sin^2\alpha\cos\alpha-\sin^2\beta\cos\beta=0 \\ &\Leftrightarrow \left(\cos^3\alpha-\cos\alpha\right)-\left(\cos^3\beta-\cos\beta\right)=0 \\ &\Leftrightarrow (\cos\alpha-\cos\beta)\left(\cos^2\alpha+\cos\alpha\cos\beta+\cos^2\beta-1\right)=0 \qquad \text{④} \end{aligned}$$

したがって

$$\text{④} \Leftrightarrow \cos\alpha-\cos\beta=0 \text{ または } \cos^2\alpha+\cos\alpha\cos\beta+\cos^2\beta-1=0 \qquad \text{⑤}$$

となり, 次のような場合わけを考える。

(i) $\cos\alpha-\cos\beta=0$ のとき。
$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ なる実数 θ に対して $\cos\theta$ は単調減少関数であるから, $\alpha=\beta$ である。よって, ① より

$$\begin{aligned} &2\sin^2\alpha\cos\alpha\left(\dfrac{2\cos\alpha}{\sin\alpha}\right)^2=1 \\ \Leftrightarrow &\cos^3\alpha=\dfrac{1}{8} \qquad \text{⑥} \end{aligned}$$

α は $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$ なる実数だから, $\cos\alpha=\dfrac{1}{2}$ すなわち

$$\alpha=\beta=\dfrac{\pi}{3} \qquad \text{⑦}$$

(ii) $\cos\alpha-\cos\beta\neq 0$, すなわち $\alpha\neq\beta$ のとき。
⑤より, ①, ②を満たす $\alpha,\ \beta$ は

$$\cos^2\alpha+\cos\alpha\cos\beta+\cos^2\beta-1=0 \qquad \text{⑧}$$

を満たしている。

ここで, $x^2+xy+y^2=1$ がどのような曲線を表すか考える。i を虚数単位として複素数

$$x+yi$$

を考える。

$x+yi$ を原点中心に複素数平面上で反時計回りに $\dfrac{\pi}{4}$ だけ回転させたときに得られる複素数を実数 X と Y とを用いて $X+Yi$ と表すと,

$$\begin{aligned} X+Yi &= (x+yi)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right) \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}(x-y)+\frac{\sqrt{2}}{2}(x+y)\,i \end{aligned} \quad ⑨$$

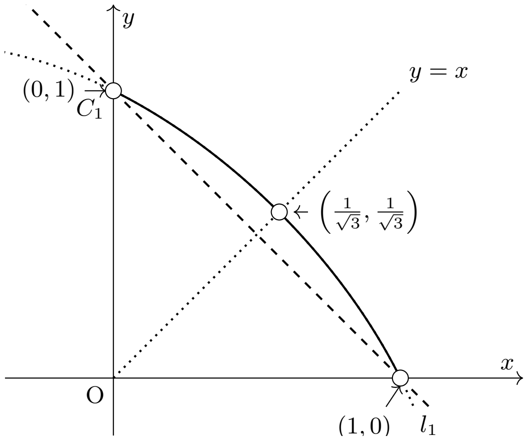
⑨の実部と虚部を比較すると

$$\begin{cases} X=\dfrac{\sqrt{2}}{2}(x-y) \\ Y=\dfrac{\sqrt{2}}{2}(x+y) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{X}{\sqrt{2}}+\dfrac{Y}{\sqrt{2}} \\ y=-\dfrac{X}{\sqrt{2}}+\dfrac{Y}{\sqrt{2}} \end{cases} \quad ⑩$$

⑩を $x^2+xy+y^2=1$ へ代入すると

$$\begin{aligned} & x^2+xy+y^2-1=0 \\ \Leftrightarrow & \frac{(X+Y)^2}{2}+\frac{(Y-X)(X+Y)}{2}+\frac{(Y-X)^2}{2}=1 \\ \Leftrightarrow & X^2+3Y^2=2 \end{aligned} \quad ⑪$$

となる。したがって, ⑪から, $x^2+xy+y^2=1$ の表す曲線は楕円 $x^2+3y^2=2$ を原点 O 中心に時計回りに $\dfrac{\pi}{4}$ だけ回転させた図形である。



すなわち, $\alpha \neq \beta$ で①と②とをともに満たすとき, $(\cos\alpha, \cos\beta)$ は楕円 $x^2+xy+y^2=1$ の $0<x$, $0<y$, $y \neq x$ の部分（曲線 C_1）上に存在する。ここで 2 点 $(0,1)$ と $(1,0)$ を結ぶ直線 $l_1 : y=-x+1$ は, 楕円 $x^2+xy+y^2=1$ の弦である。上図より,

$$\cos\alpha+\cos\beta>1 \quad ⑫$$

が成り立つ。[*1]

[*1] $\cos\alpha+\cos\beta=\sqrt{1+\cos\alpha\cos\beta}>1$ からも示せるが, 図形的意味を強調した。

一方で

$$
\begin{aligned}
①+② \Leftrightarrow &\left(\frac{1}{\tan\alpha}+\frac{1}{\tan\beta}\right)^2\left(\sin^2\alpha\cos\alpha+\sin^2\beta\cos\beta\right)=1\\
\Leftrightarrow &\sin^2(\alpha+\beta)\left(\sin^2\alpha\cos\alpha+\sin^2\beta\cos\beta\right)=\sin^2\alpha\sin^2\beta
\end{aligned} \tag{⑬}
$$

ここで⑬の左辺の 2 番目の ( ) 内を考えると，

$$
\begin{aligned}
\sin^2\alpha\cos\alpha+\sin^2\beta\cos\beta &= \left(1-\cos^2\alpha\right)\cos\alpha+\left(1-\cos^2\beta\right)\cos\beta\\
&=-\left(\cos\alpha+\cos\beta\right)\left(\cos^2\alpha-\cos\alpha\cos\beta+\cos^2\beta-1\right)
\end{aligned} \tag{⑭}
$$

⑭に⑧を用いると，

$$
\begin{aligned}
&=-\left(\cos\alpha+\cos\beta\right)\left(-2\cos\alpha\cos\beta\right)\\
&=2\cos\alpha\cos\beta\left(\cos\alpha+\cos\beta\right)
\end{aligned} \tag{⑮}
$$

⑬に⑮を代入すると，

$$
2\sin^2(\alpha+\beta)\cos\alpha\cos\beta\left(\cos\alpha+\cos\beta\right)=\sin^2\alpha\sin^2\beta \tag{⑯}
$$

一方で, ⑯の右辺についても考えると，

$$
\begin{aligned}
\sin^2\alpha\sin^2\beta &= \left(1-\cos^2\alpha\right)\left(1-\cos^2\beta\right)\\
&=1-\left(\cos^2\alpha+\cos^2\beta\right)+\cos^2\alpha\cos^2\beta\\
&=\cos\alpha\cos\beta\left(1+\cos\alpha\cos\beta\right)
\end{aligned} \tag{⑰}
$$

⑯に⑰を用いて，

$$
2\sin^2(\alpha+\beta)\cos\alpha\cos\beta\left(\cos\alpha+\cos\beta\right)=\cos\alpha\cos\beta\left(1+\cos\alpha\cos\beta\right) \tag{⑱}
$$

ここで再び⑧を次のように変形する。

$$
\begin{aligned}
⑧ \Leftrightarrow &\left(\cos\alpha+\cos\beta\right)^2-\cos\alpha\cos\beta-1=0\\
\Leftrightarrow &\left(\cos\alpha+\cos\beta\right)^2=1+\cos\alpha\cos\beta
\end{aligned} \tag{⑲}
$$

⑲を⑱に用いることで

$$
⑫ \Leftrightarrow 2\sin^2(\alpha+\beta)\cos\alpha\cos\beta\left(\cos\alpha+\cos\beta\right)=\cos\alpha\cos\beta\left(\cos\alpha+\cos\beta\right)^2 \tag{⑳}
$$

⑳の両辺を $\cos\alpha\cos\beta\left(\cos\alpha+\cos\beta\right)\neq 0$ で割ると，

$$
2\sin^2(\alpha+\beta)=\cos\alpha+\cos\beta \tag{㉑}
$$

㉑の左辺について, $\cos\alpha$, $\cos\beta$ で表すことを考える。

$$
\begin{aligned}
\sin^2(\alpha+\beta) &= \left(\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta\right)^2\\
&=\sin^2\alpha\cos^2\beta+2\sin\alpha\cos\alpha\sin\beta\cos\beta+\sin^2\beta\cos^2\alpha
\end{aligned} \tag{㉒}
$$

となる。

ここで

$$
\sin^2\alpha\cos^2\beta=\left(1-\cos^2\alpha\right)\cos^2\beta
$$

に対して⑧を用いると

$$
\begin{aligned}
&=\left(1-\left(1-\cos^2\beta-\cos\alpha\cos\beta\right)\right)\cos^2\beta\\
&=\cos^3\beta\left(\cos\alpha+\cos\beta\right)
\end{aligned} \tag{㉓}
$$

同様にして

$$\sin^2\beta\cos^2\alpha = \cos^3\alpha\left(\cos\alpha + \cos\beta\right) \tag{㉔}$$

$0 < \cos\alpha < 1$ および $0 < \cos\beta < 1$ だから, ㉓より

$$\sin\alpha\cos\beta = \cos\beta\sqrt{\cos\beta\left(\cos\alpha + \cos\beta\right)} \tag{㉕}$$

同様にして㉔より

$$\sin\beta\cos\alpha = \cos\alpha\sqrt{\cos\alpha\left(\cos\alpha + \cos\beta\right)} \tag{㉖}$$

㉓〜㉖を㉒に代入することで

$$\sin^2\left(\alpha + \beta\right) = \left(\cos\alpha + \cos\beta\right)\left(\cos^3\alpha + 2\cos\alpha\cos\beta\sqrt{\cos\alpha\cos\beta} + \cos^3\beta\right) \tag{㉗}$$

㉑に㉗を用いると $\cos\alpha > 0$ および $\cos\beta > 0$ だから

$$\begin{aligned}
&2\left(\cos\alpha + \cos\beta\right)\left(\cos^3\alpha + 2\cos\alpha\cos\beta\sqrt{\cos\alpha\cos\beta} + \cos^3\beta\right) = \cos\alpha + \cos\beta\\
\Leftrightarrow\ &2\left(\cos^3\alpha + 2\cos\alpha\cos\beta\sqrt{\cos\alpha\cos\beta} + \cos^3\beta\right) = 1\\
\Leftrightarrow\ &2\left(\cos\alpha\sqrt{\cos\alpha} + \cos\beta\sqrt{\cos\beta}\right)^2 = 1\\
\Leftrightarrow\ &\cos\alpha\sqrt{\cos\alpha} + \cos\beta\sqrt{\cos\beta} = \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad ㉘
\end{aligned}$$

⑫から

$$\cos\alpha\sqrt{\cos\alpha} + \cos\beta\sqrt{\cos\beta} > \cos\alpha\sqrt{\cos\alpha} + \left(1 - \cos\alpha\right)\sqrt{1 - \cos\alpha} \tag{㉙}$$

㉙の右辺について $0 < \cos\alpha < 1$ から $\left(\text{相加平均}\right) \geqq \left(\text{相乗平均}\right)$ を用いると,

$$\cos\alpha\sqrt{\cos\alpha} + \left(1 - \cos\alpha\right)\sqrt{1 - \cos\alpha} \geqq 2\sqrt{\cos\alpha\left(1 - \cos\alpha\right)\sqrt{\cos\alpha\left(1 - \cos\alpha\right)}} \tag{㉚}$$

㉒の等号は

$$\begin{aligned}
&\cos\alpha\sqrt{\cos\alpha} = \left(1 - \cos\alpha\right)\sqrt{1 - \cos\alpha}\\
\Leftrightarrow\ &\cos^3\alpha = \left(1 - \cos\alpha\right)^3\\
\Leftrightarrow\ &\cos\alpha = \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

でなりたち,

$$\cos\alpha\sqrt{\cos\alpha} + \cos\beta\sqrt{\cos\beta} > \cos\alpha\sqrt{\cos\alpha} + \left(1 - \cos\alpha\right)\sqrt{1 - \cos\alpha} \geqq \frac{1}{\sqrt{2}} \tag{㉛}$$

㉘と㉛を考えると, $\alpha \neq \beta$ なる α と β で, ③を満たし, かつ⑬を満たすような α, β は存在しない。つまり, $\alpha \neq \beta$ で①と②を満たす α, β は存在しない。

以上(i), (ii)より, 求める α と β は

$$\underline{\alpha = \beta = \frac{\pi}{3}}$$

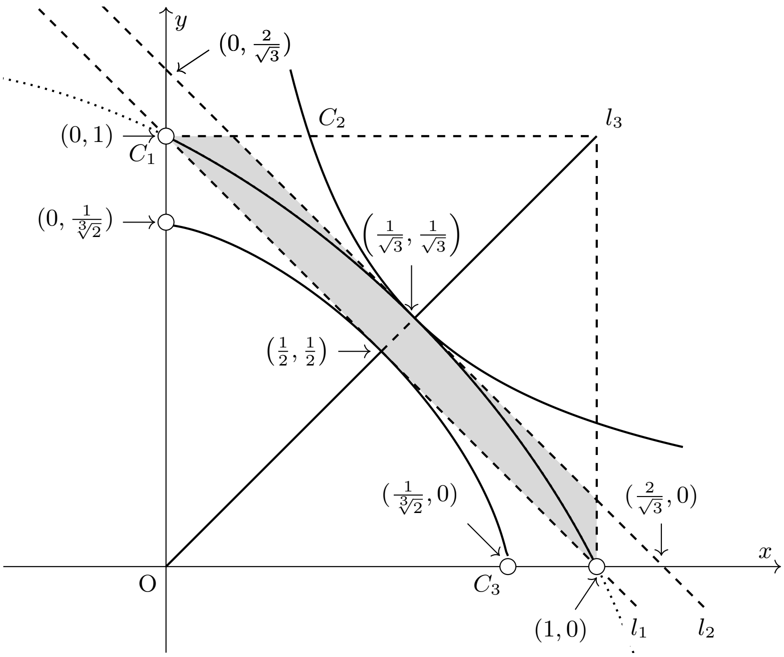
【補足】

1° ⑧式が楕円を表すことがわからなくても, $0<\cos\alpha<1$, $0<\cos\beta<1$ を利用して下記の不等式が得られる。

$$\begin{cases} 1<\cos\alpha+\cos\beta<\dfrac{2}{\sqrt{2}} & ㉜ \\ 0<\cos\alpha\cos\beta<\dfrac{1}{3} & ㉝ \end{cases}$$

その表す領域を $x=\cos\alpha$, $y=\cos\beta$ として, xy 平面上に図示すると, 下図の灰色部である（ただし, 境界含まず $0<x<1$, $0<y<1$, $l_3: y=x$ 上は除く）。$l_1: y=-x+1$ と $l_2: y=-x+\dfrac{2}{\sqrt{3}}$ はそれぞれ楕円 $x^2+xy+y^2=1$ の弦と接線である。C_1 はその楕円 $0<x<1$, $0<y<1$ の部分である。また, 下図で $C_2: xy=\dfrac{1}{3}\,(0<x<1$ かつ $0<y<1)$ である。

また, ㉘を表す曲線 C_3 も図示したが, これは C_1 と交点をもたない。



2° ⑧から,

$$\cos\alpha+\cos\beta=\sqrt{1+\cos\alpha\cos\beta}$$

がわかる。また,

$$⑧ \Leftrightarrow (\cos\alpha-\cos\beta)^2=1-3\cos\alpha\cos\beta$$

で (右辺) >0 となるから

$$0<\cos\alpha\cos\beta<\frac{1}{3}$$

が得られて,

$$\cos\alpha+\cos\beta<\frac{2}{\sqrt{3}}$$

がわかる。