第　1　問

Oを原点とする座標平面上の放物線 $y=x^2$ に, 異なる2点AとBをとる。

(1)　AとBの中点が $y=x$ 上に存在するようにAとBが動くとき, 直線ABの通過する領域を図示せよ。

(2)　△OABの重心が $y=x$ 上に存在するようにAとBが動くとき, 直線ABの通過する領域を図示せよ。

計　算　用　紙

(切り離さないで用いよ。)

【1】

O を原点とする座標平面上の放物線 $y=x^2$ に, 異なる 2 点 A と B をとる。

(1) A と B の中点が $y=x$ 上に存在するように A と B が動くとき, 直線 AB の通過する領域を図示せよ。
(2) △OAB の重心が $y=x$ 上に存在するように A と B が動くとき, 直線 AB の通過する領域を図示せよ。

(1) $a \neq b$ なる実数 a と b により, $\mathrm{A}(a, a^2)$, $\mathrm{B}(b, b^2)$ とおく。線分 AB の中点が $y=x$ 上にあるから, 題意の必要十分条件は

$$\begin{cases} a \neq b \\ \dfrac{a+b}{2} = \dfrac{a^2+b^2}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq b \\ a+b = (a+b)^2 - 2ab \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq b \\ ab = \dfrac{1}{2}(a+b)((a+b)-1) \end{cases} \qquad ①$$

ある実数 s によって,

$$s = a+b \qquad ②$$

とおくと, u についての次の二次方程式

$$u^2 - su + \frac{1}{2}s(s-1) = 0 \qquad ③$$

は, ①より相異なる二つの実数解 $u=a, b$ をもつ。
その必要十分条件とは③の判別式を D とすると

$$D = s^2 - 4 \cdot \frac{1}{2}s(s-1)$$
$$= -s^2 + 2s > 0$$
$$\Leftrightarrow s(s-2) < 0$$
$$\Leftrightarrow 0 < s < 2 \qquad ④$$

ここで点 $\mathrm{P}(X, Y)$ を直線 AB 上にとると, X と Y とが満たすべき関係式は,

$$Y = \frac{a^2-b^2}{a-b}(X-a) + a^2$$
$$\Leftrightarrow Y = (a+b)X - ab$$

②の s を用いて

$$\Leftrightarrow s^2 - (2X+1)s + 2Y = 0 \qquad ⑤$$

④から, s は $0<s<2$ なる実数であり, s についての二次方程式⑤が $0<s<2$ に少なくとも一つの実数解をもつ。その必要十分条件を X と Y とで表現したとき, それが求める直線 AB の通過領域である。

$$f(s) = s^2 - (2X+1)s + 2Y$$

とする。s の二次関数 $f(s)$ の軸 $s = \dfrac{2X+1}{2}$ の位置によって, 次のような場合わけを行う。

(i) $\dfrac{2X+1}{2} \leqq 0 \Leftrightarrow X \leqq -\dfrac{1}{2}$ のとき。

二次方程式 $f(s)=0$ が $0<s<2$ に解をもつ必要十分条件は

$$\begin{cases} f(0) < 0 \\ f(2) > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} Y < 0 \\ Y > 2X-1 \end{cases} \qquad ⑥$$

(ii) $0 < \dfrac{2X+1}{2} < 2 \Leftrightarrow -\dfrac{1}{2} < X < \dfrac{3}{2}$ のとき。

二次方程式 $f(s)=0$ が $0<s<2$ に少なくとも一つの実数解をもつ条件とは, その判別式を D' として

$$\begin{cases} D' \geqq 0 \\ f(0) > 0 \text{ または } f(2) > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} Y \leqq \dfrac{1}{2}\left(X + \dfrac{1}{2}\right)^2 \\ Y > 0 \text{ または } Y > 2X-1 \end{cases} \qquad ⑦$$

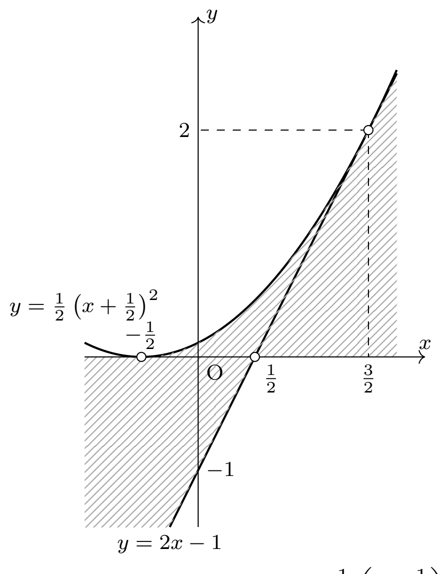
(iii) $2 \leqq \dfrac{2X+1}{2} \Leftrightarrow \dfrac{3}{2} \leqq X$ のとき。

(i)と同様に考えて, 求める条件は

$$\begin{cases} f(0) > 0 \\ f(2) < 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} Y > 0 \\ Y < 2X-1 \end{cases} \qquad ⑧$$

以上の(i)から(iii)の議論から, 求める領域は $X \to x$, $Y \to y$ として,



上図の斜線部である。ただし, 境界線は $y = \dfrac{1}{2}\left(x + \dfrac{1}{2}\right)^2$ 上のみ含み, 他の境界線および ∘ で示した点は含まない。

(2) △OAB の重心 $\left(\dfrac{a+b}{3}, \dfrac{a^2+b^2}{3}\right)$ が, $y=x$ 上に存在する必要条件は, ①であり, それは②の s が④を満たすことと同値である。

ただし, (2)においては, 3 点 O, A, B が三角形をなすという条件が加わり, それは

$$ab \neq 0$$

である。

したがって，△OAB の重心が $y = x$ 上に存在する必要十分条件とは

$$\begin{cases} 0 < s < 2 \\ ab \neq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0 < s < 2 \\ s(s-1) \neq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0 < s < 2 \\ s \neq 1 \end{cases} \qquad ⑨$$

となるので，(1)で求めた条件（⑥または⑦または⑧）から，s の二次方程式⑤が，$0 < s < 2$ において $s = 1$ のみを実数解とする場合を除外すればよい。

$$f(1) = 0 \qquad ⑩$$

$$\Leftrightarrow Y = X$$

となり，$f(s) = 0$ のもう一方の解（あるいは重解としての $s = 1$）は

$$s = 2X$$

として得られる。

$s = 2X$ が⑨に含まれない，すなわち

$$2X \leqq 0 \text{ または } 2X = 1 \text{ または } 2 \leqq 2X$$

$$\Leftrightarrow X \leqq 0 \text{ または } X = \frac{1}{2} \text{ または } 1 \leqq X$$

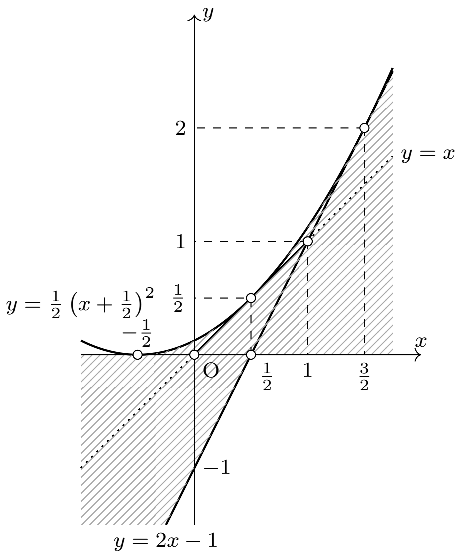
となる。

よって，(1)で求めた条件から，次の条件

$$\begin{cases} Y = X \\ X \leqq 0 \text{ または } X = \dfrac{1}{2} \text{ または } 1 \leqq X \end{cases} \qquad ⑪$$

を除外したものが，(2)で求める領域である。

したがって，求める領域は $X \to x$, $Y \to y$ として，



上図の斜線部である。ただし，境界線は $y = \dfrac{1}{2}\left(x + \dfrac{1}{2}\right)^2$ 上のみ含み，他の境界線および ∘ で示した点および $x \leqq 0$ または $1 \leqq x$ での $y = x$ 上は含まない。